Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 16, No 2, p. 87–100, julio–diciembre de 1998

# Espacios fuertemente $T_1$

Néstor Raúl Pachón Rubiano*

**Resumen**

Las topologías fuertemente $T_1$ (o, abreviadamente, $F$-$T_1$) fueron introducidas por el autor en [3] donde se demuestra que en un cierto conjunto ordenado son lo únicos elementos maximales que no poseen "antecesores cercanos". En este artículo se presentan algunas propiedades (y defectos) de esas topologías, que dan respuesta a las preguntas naturales que surgen siempre que un nuevo tipo de espacio topológico es puesto en escena.

Para hablar de lo positivo, se demuestra que todo conjunto infinito admite una de estas topologías; que ser $F$-$T_1$ es una propiedad topológica; que el producto de espacios $F$-$T_1$ es $F$-$T_1$, y que la propiedad de ser $F$-$T_1$ es heredada por subespacios abiertos. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de Hausdorff sea $F$-$T_1$, se proporciona un mecanismo que permite construir topologías $F$-$T_1$ que no son de Hausdorff, y se muestra cómo "recuperar" una topología $F$-$T_1$ por medio de algunas topologías $T_1$ que son menos finas que aquella.

En cuanto a lo negativo, se encontrará que la imagen continua y abierta de un espacio $F$-$T_1$ no siempre es $F$-$T_1$, que la propiedad de ser $F$-$T_1$ no es hereditaria, que un cociente de un espacio $F$-$T_1$ no necesariamente lo es, que la intersección (finita o infinita) de topologías $F$-$T_1$ no necesariamente lo es, y que la topología generada por la unión de dos topologías $F$-$T_1$ no siempre es $F$-$T_1$.

En la parte final del trabajo aparecen una serie de preguntas para las cuales no tenemos respuesta aún, como una invitación al lector para que se motive a enriquecer el estudio de estos nuevos espacios, ya sea dando respuestas a ellas o formulando y tratando de dar solución a sus propias inquietudes. Al fin y al cabo, prácticamente todo está por hacerse.

**Palabras claves**: Espacios $T_1$, espacios $T_2$, espacios $F$-$T_1$, operaciones entre espacios topológicos.

*Centro de Estudios de Ciencias Básicas, Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá, COLOMBIA; Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, COLOMBIA. (nrpachon@hotmail.com, npachon@escuelaing.edu.co)

# 1. Introducción

Los conceptos de la teoría de conjuntos que aparecen en este artículo son los que se pueden encontrar en textos como los de Azriel Levy [2] o Jean Rubin [4]. Como de costumbre, identificamos un número ordinal con el conjunto de números ordinales que son menores que él, y consideramos los números cardinales como aquellos números ordinales que no son equipotentes a ningún ordinal menor. Con el símbolo $\omega$ denotamos al primer ordinal transfinito, el cual puede ser identificado con el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales dotado del orden ordinario $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$.

Todos los conceptos topológicos que aquí aparecen, salvo el de espacios $F$-$T_1$, son clásicos y pueden ser encontrados en textos como los de Stephen Willard [6] o George Simmons [5]. Si $(X, \beta)$ es un espacio topológico y $A$ es un subconjunto de $X$, con el símbolo $adh_\beta(A)$ denotaremos el conjunto de *puntos adherentes* de $A$ en ese espacio, y con el símbolo $D_\beta\,(A)$ denotaremos el conjunto de *puntos de acumulación* de $A$ en ese espacio.

# 2. Definición principal y primeras propiedades

**Definición 2.1.** *Un espacio topológico $(X, \Omega)$ se dice **fuertemente** $T_1$, o, abreviadamente, $\mathbf{F}$-$\mathbf{T_1}$, si satisface que, para todos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen $U, V \in \Omega$ tales que*

$$U \cap \{x, y\} = \{x\}, \quad V \cap \{x, y\} = \{y\}, \quad U \cup \{y\} \notin \Omega, \quad V \cup \{x\} \notin \Omega.$$

Algunas conclusiones, que son evidentes a partir de esta definición, quedan consignadas en la siguiente nota.

**Nota 2.1.** *En primer lugar, es obvio que un espacio $F$-$T_1$ es un espacio $T_1$.*

*En segundo lugar, un espacio $F$-$T_1$ con más de un punto no puede tener conjuntos unitarios (singletons) abiertos (con lo que resulta ser* perfecto*), y, al ser $T_1$, **su único abierto finito tiene que ser el conjunto vacío**. De aquí se concluye que, si $(X, \Omega)$ es un espacio $F$-$T_1$ entonces $X$ es unitario o infinito.*

*En tercer lugar, un espacio topológico $(X, \Omega)$ es $F$-$T_1$ si y solo si para cualesquiera $x, y \in X$, distintos, existen $U, V \in \Omega$ tales que $U \cap \{x, y\} = \{x\}$, $V \cap \{x, y\} = \{y\}$, $y \in D_\Omega\,(U^c)$, $x \in D_\Omega\,(V^c)$.*

*En cuarto lugar, si $(X, \Omega)$ es un espacio $F$-$T_1$ con más de un punto y $\Psi$ es la colección de aquellos elementos de $\Omega$ que no están en la topología de los* *complementos finitos, entonces* $X = \bigcup_{U \in \Psi} U$*. Claro que esta propiedad no es exclusiva de los espacios* $F$*-*$T_1$ *ya que los espacios* $T_2$ *también la satisfacen.*

*Además, si sobre un conjunto con más de un elemento se considera la topología discreta, el espacio resultante no es un espacio* $F$*-*$T_1$*, aunque es* $T_1$*. Se tiene otro ejemplo de espacio* $T_1$ *que no es* $F$*-*$T_1$ *si se considera un conjunto infinito dotado de la topología de los complementos finitos.*

Podemos obtener nuestros primeros espacios $F$-$T_1$ si tenemos en cuenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** *Consideremos* $(X, \leqslant)$*, un conjunto totalmente ordenado y denso*[1]*, con* $X$ *infinito.*

*Sea* $\mathfrak{U}$ ***la topología del orden para*** $X$*, es decir la topología para* $X$ *que es generada por el conjunto*

$$\zeta = \{P(a)_{\leqslant} : a \in X\} \cup \{S(b)_{\leqslant} : b \in X\},$$

*donde*

$$P(a)_{\leqslant} = \{c \in X : c < a\}$$

*y*

$$S(b)_{\leqslant} = \{d \in X : b < d\}.$$

*Sean* $x$ *y* $y$ *elementos de* $X$*, distintos. Sean* $a = \text{mín}\{x, y\}$ *y* $b = \text{máx}\{x, y\}$*. Como* $a < b$*, existe* $c \in X$ *tal que* $a < c < b$*.*

*Los conjuntos* $U = P(c)_{\leqslant}$ *y* $V = S(c)_{\leqslant}$ *son tales que* $U, V \in \mathfrak{U}$*,* $U \cap \{a, b\} = \{a\}$*,* $V \cap \{a, b\} = \{b\}$*,* $U \cup \{b\} \notin \mathfrak{U}$ *y* $V \cup \{a\} \notin \mathfrak{U}$*. Por lo tanto* $(X, \mathfrak{U})$ *es un espacio* $F$*-*$T_1$*.*

En particular, el conjunto de los números reales, dotado de la topología ordinaria, resulta ser un espacio $F$-$T_1$.

**Nota 2.2.** *Si* $(X, \leqslant)$ *es un conjunto parcialmente ordenado y* $f : X \longrightarrow X$ *es una función biyectiva, entonces la relación* $\preceq$ *definida sobre* $Y$ *mediante*

$$y_1 \preceq y_2 \text{ si y solo si } f(y_1) \leqslant f(y_2)$$

*resulta ser una relación de orden parcial y* $(X, \leqslant)$ *y* $(Y, \preceq)$ *son conjuntos ordenados isomorfos, siendo* $f$ *un isomorfismo.*

[1] Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$ es *denso* si para cualesquiera elementos $a$ y $b$ en $A$, con $a \prec b$, existe un elemento $c$ en $A$ tal que $a \prec c \prec b$. Nótese que esto inmediatamente implica que entre dos elementos de $A$, distintos, hay infinitos elementos de $A$.

*De aquí se deduce que, como el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, dotado del orden ordinario, es totalmente ordenado, denso y sin extremos, entonces todo conjunto enumerable admite una relación de orden total, densa y sin extremos.*

En el primer teorema que vamos a presentar nos valemos de este hecho para dar una demostración[2] de que sobre todo conjunto infinito es posible definir una topología $F$-$T_1$.

**Teorema 2.1.** *Todo conjunto infinito puede ser totalmente ordenado de tal manera que resulte ser denso y sin extremos (sin mínimo ni máximo), con lo cual todo conjunto infinito admite una topología $F$-$T_1$.*

**Demostración.** Sea $X$ un conjunto infinito arbitrario. Si $card(X) = \omega$, $X$ es enumerable y el resultado se tiene, por la nota 2.2.
Supongamos que $card(X) > \omega$. Sea

$$l(X) =: \{0\} \cup \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal límite y } \alpha < card(X)\}.$$

Para cada $u \in l(X)$ sea

$$A_u = \{u + n : n < \omega\}.$$

Se tiene que

$$card(X) = \bigcup_{u \in l(X)} A_u \quad \text{(unión disjunta)}.$$

Para cada $u \in l(X)$, $A_u$ es enumerable, y por lo tanto admite una relación de orden total, densa y sin extremos, $R_u$.
Sea

$$\Re = \{(u, v) : u, v \in l(X) \text{ y } u < v\}.$$

Puesto que $(0, \omega) \in \Re$, tenemos que $\Re \neq \emptyset$.
La relación

$$R =: \left( \bigcup_{(u,v) \in \Re} A_u \times A_v \right) \cup \left( \bigcup_{u \in l(X)} R_u \right)$$

es una relación de orden total sobre $card(X)$, y $(card(X), R)$ es denso y sin extremos.
Como $X$ es equipotente a $card(X)$, la prueba está completa. ∎

[2] Utilizando Teoría de Modelos es posible dar otra prueba de este hecho.

La propiedad de ser $F$-$T_1$ es una propiedad topológica, como se muestra muy fácilmente en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** *Si* $(X, \Phi)$ *y* $(Y, \Omega)$ *son espacios topológicos homeomorfos y* $(X, \Phi)$ *es* $F$-$T_1$*, entonces* $(Y, \Omega)$ *es* $F$-$T_1$.

**Demostración.** Sea $f : (X, \Phi) \to (Y\, Omega)$ un homeomorfismo. Supongamos que $a, b \in X$ y que $f(a) \neq f(b)$. Existen $U, V \in \Phi$ tales que $a \in U$, $b \in V$, $U \cup \{b\} \notin \Phi$ y $V \cup \{a\} \notin \Phi$. Es claro que $f(a) \in f(U) \in \Omega$, $f(b) \in f(V) \in \Omega$, $f(U) \cup \{f(b)\} \notin \Omega$ y $f(V) \cup \{f(a)\} \notin \Omega$. Por lo tanto $(Y, \Omega)$ es un espacio $F$-$T_1$.

## 3. Operaciones entre espacios $F$-$T_1$

Vamos a examinar ahora el "desenvolvimiento social" de los espacios $F$-$T_1$ cuando interactúan con otros espacios del mismo tipo.

En primera instancia se prueba que el producto de espacios $F$-$T_1$ es $F$-$T_1$.

**Teorema 3.1.** *Sea* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia no vacía de espacios* $F$-$T_1$. *Sean* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *y* $\tau = \prod_{i\in I} \tau_i$. *Tenemos que* $(X, \tau)$ *es un espacio* $F$-$T_1$.

**Demostración.** sean $(a_i)_{i\in I}$ y $(b_i)_{i\in I}$ elementos distintos del conjunto $X$. Para algún $j \in I$ se tiene $a_j \neq b_j$. Existen $U, V \in \tau_j$ tales que:

$$U \cap \{a_j, b_j\} = \{a_j\}, \quad V \cap \{a_j, b_j\} = \{b_j\}, \quad U \cup \{b_j\} \notin \tau_j, \quad V \cup \{a_j\} \notin \tau_j.$$

Sean

$$W = \prod_{i\in I} A_i \text{ y } Z = \prod_{i\in I} B_i,$$

donde

$$A_i = \begin{cases} U, & \text{si } i = j, \\ X_i, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad B_i = \begin{cases} V, & \text{si } i = j, \\ X_i, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es claro que $W, Z \in \tau$, que

$$\begin{gathered} W \cap \left\{(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\right\} = \left\{(a_i)_{i\in I}\right\}, \\ Z \cap \left\{(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\right\} = \left\{(b_i)_{i\in I}\right\}, \\ \pi_j\left(W \cup \left\{(b_i)_{i\in I}\right\}\right) = \pi_j\left(W\right) \cup \pi_j(\left\{(b_i)_{i\in I}\right\}) = U \cup \{b_j\} \end{gathered}$$

y

$$\pi_j\left(Z \cup \left\{(a_i)_{i\in I}\right\}\right) = \pi_j\left(Z\right) \cup \pi_j(\left\{(a_i)_{i\in I}\right\}) = V \cup \{a_j\},$$

donde $\pi_j$ es la función $j$–ésima proyección

$$\begin{array}{rcccc} \pi_j & : & (X,\tau) & \longrightarrow & (X_j\ ,\tau_j) \\ & & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_j. \end{array}$$

Como $\pi_j$ es una función abierta, se debe tener que $W\cup\left\{(b_i)_{i\in I}\right\}\notin\tau$ y que $Z\cup\left\{(a_i)_{i\in I}\right\}\notin\tau$. Por lo tanto el espacio $(X,\tau)$ es $F$-$T_1$. ∎

El comportamiento de los espacios $F$-$T_1$ frente a los cocientes no es bueno, como lo muestra el próximo ejemplo.

**Ejemplo 3.1.** *Sea $X=\mathbb{R}$, dotado de la topología usual. Sea $R$ la relación sobre $X$ definida por:*

$(x,y)\in R$ *si y solo si $x$ e $y$ son ambos racionales o ambos irracionales.*

*Entonces $R$ es una relación de equivalencia, y el espacio cociente $X/R$ es el espacio con dos puntos "grosero" o indiscreto, que tiene como únicos abiertos a $\emptyset$ y a $X/R$.*

*Según la nota 2.1, este espacio cociente no puede ser $F$-$T_1$, pues ni siquiera es $T_1$.*

*En general, si un cociente de un espacio $F$-$T_1$ es un espacio finito con más de un punto, este cociente no podrá ser $F$-$T_1$, pues, como ya se comentó anteriormente, ningún espacio finito con más de un punto puede serlo.*

Con respecto a las intersecciones de topologías $F$-$T_1$, el teorema y el ejemplo que siguen nos mostrarán que las cosas no marchan bien, ni en el caso de intersecciones infinitas, ni en el caso de intersecciones finitas.

**Teorema 3.2.** *Si $X$ es un conjunto infinito entonces la intersección de todas las topologías $F$-$T_1$ sobre $X$ es la topología de los complementos finitos, y, por lo tanto, esa intersección no es $F$-$T_1$. De aquí se deduce que* no hay una topología $F$-$T_1$ mínima sobre $X$.

**Demostración.** Sea $\mathcal{F}_1(X)$ la colección de todas las topologías $F$-$T_1$ sobre $X$, y sea $C_F(X)$ la topología de los complementos finitos sobre $X$.

Sea

$$\Phi =_{\beta\in\mathcal{F}_1(X)} \beta.$$

Es claro que $C_F(X)\subseteq\Phi$.

Supongamos que $V$ es un subconjunto de $X$ y que $V\notin C_F(X)$. El conjunto $V^c=X\setminus V$ es infinito, pero distinto de $X$. Veamos que $V\notin\Phi$.

*i*) Si $V$ es finito, es obvio que $V \notin \Phi$, puesto que en las topologías $F$-$T_1$ el único abierto finito es $\emptyset$.

*ii*) Supongamos que $V$ es infinito. Sean $a \in V$ y $b \in V^c$, arbitrarios pero fijos.

Consideremos los conjuntos $U = V \setminus \{a\}$ y $W = V^c \setminus \{b\}$.

Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones de orden total, densas y sin extremos sobre $U$ y $W$, respectivamente.

Llamemos $R$ a la relación sobre $X$ dada por

$$R_1 \cup R_2 \cup \{(b,z) : z \in X\} \cup \{(z,a) : z \in X\} \cup \{(u,w) : u \in U \text{ y } w \in W\}.$$

$R$ resulta ser una relación de orden total y densa sobre $X$.

Si $\gamma$ es la topología del orden sobre $X$ debida a $R$, entonces $(X,\gamma)$ es $F$-$T_1$ y $V \notin \gamma$, ya que $a \notin int_\gamma(V)$. En efecto, si fuera $a \in int_\gamma(V)$, existiría $w \in W$ tal que el intervalo abierto–cerrado $(w,a]$, del conjunto ordenado $(X,R)$, estaría contenido en $V$, lo que no sería posible ya que el intervalo abierto $(w,a)$, del conjunto ordenado $(X,R)$, sería no vacío y $(w,a) \subseteq W \subseteq V^c$.

Tenemos que $V \notin \gamma$, con lo que $V \notin \Phi$.

En conclusión $\Phi \subseteq C_F(X)$, con lo que hemos completado la prueba de que $\Phi = C_F(X)$. ∎

**Ejemplo 3.2.** *Sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ vamos a considerar las topologías $\phi$ y $\psi$ descritas así:*

*a*) *En el espacio $(X,\phi)$, un subconjunto $V$ de $\mathbb{R}^2$ es una vecindad de un punto $(a,b) \neq (0,0)$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left\{(a,y) \in \mathbb{R}^2 : b-\varepsilon < y < b+\varepsilon\right\} \subseteq V$ (se puede pensar que $V$ contiene un "intervalo abierto vertical", centrado en el punto $(a,b)$), y un subconjunto $W$ de $\mathbb{R}^2$, que contiene el punto $(0,0)$, es una vecindad de $(0,0)$ si existe un subconjunto finito $J_W$ de $\mathbb{R}$ tal que, para toda $x \in \mathbb{R}\setminus J_W$, $\{x\} \times \mathbb{R} \subseteq W$ (podemos decir que $W$ contiene "casi todas" las rectas verticales).*

*b*) *en el espacio $(X,\psi)$, un subconjunto $V$ de $\mathbb{R}^2$ es una vecindad de un punto $(a,b) \neq (0,0)$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\left\{(x,b) \in \mathbb{R}^2 : b-\varepsilon < x < b+\varepsilon\right\} \subseteq V$$

*(se puede pensar que $V$ contiene un "intervalo abierto horizontal", centrado en el punto $(a,b)$), y un subconjunto $W$ de $\mathbb{R}^2$, que contiene al punto $(0,0)$, es una vecindad de $(0,0)$ si existe un subconjunto finito $J_W$ de $\mathbb{R}$ tal que, para toda $y \in \mathbb{R} \setminus J_W$, $\mathbb{R} \times \{y\} \subseteq W$ (podemos decir que $W$ contiene "casi todas" las rectas horizontales).*

*Como los espacios $(X,\phi)$ y $(X,\psi)$ son $T_2$ y tienen como único abierto finito el conjunto $\emptyset$, estos espacios son $F$-$T_1$. Sin embargo, el espacio $(X,\phi\cap\psi)$ no es $F$-$T_1$, ya que, como los únicos abiertos de este espacio que contienen el punto $(0,0)$ son aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que contienen al punto $(0,0)$ y que tienen complemento finito, entonces, si $(a,b) \neq (0,0)$, no existe $Z \in \phi\cap\psi$ tal que $(0,0) \in Z$ y $Z\cup\{(a,b)\} \notin \phi\cap\psi$.*

A continuación demostramos que sobre ningún conjunto infinito existe un topología $F$-$T_1$ máxima. La prueba se basa en el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Sea $X$ un conjunto infinito. Si $J$ es un subconjunto infinito de $X$ tal que su complemento, $J^c$, también es infinito, entonces existe una topología $\Phi$ sobre $X$, $F$-$T_1$, tal que $J$, $J^c \in \Phi$.*

**Demostración.** Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden total, densas y sin extremos sobre $J$ y $J^c$ respectivamente. Consideremos la relación

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \{(u,v) : u \in J \text{ y } v \in J^c\}.$$

El conjunto $(X,\mathcal{R})$ resulta ser totalmente ordenado, denso y sin extremos. Si $\Phi$ es la la topología del orden sobre $X$, debida a $\mathcal{R}$, sabemos que $(X,\Phi)$ es $F$-$T_1$. Además, es fácil ver que $J$, $J^c \in \Phi$. ∎

**Teorema 3.3.** *Sea $X$ un conjunto infinito y sea $\mathcal{F}_1(X)$ la colección de todas las topologías $F$-$T_1$ sobre $X$. Entonces la topología sobre $X$ generada por la unión de los elementos de $\mathcal{F}_1(X)$ es la topología discreta. De aquí se concluye que* no hay una topología $F$-$T_1$ máxima sobre $X$.

**Demostración.** Sea $a \in X$, arbitrario. Sea $I$ un subconjunto de $X$ tal que $a \in$, $I$ y $I^c$ son infinitos. Sea $J = I^c \cup \{a\}$.

Por el lema 3.1 existen topologías $F$-$T_1$ sobre $X$, digamos $\Phi$ y $\Omega$, tales que $I$ y $I^c$ son elementos de $\Phi$, y $J$ y $J^c$ son elementos de $\Omega$.

Es claro que $\{a\} = I \cap J \in \left\langle \bigcup_{\beta\in\mathcal{F}_1(X)} \beta \right\rangle$. Por lo tanto cada punto de $X$ es abierto en el espacio $\left(X, \left\langle \bigcup_{\beta\in\mathcal{F}_1(X)} \beta \right\rangle\right)$, con lo que este espacio es el espacio discreto. ∎

Entre las cosas que nos dice el teorema anterior tenemos que *la topología generada por la unión arbitraria de topologías $F$-$T_1$ no necesariamente es $F$-$T_1$*. Además, de la demostración del teorema podemos concluir que *no siempre la topología generada por la unión de dos topologías $F$-$T_1$ es $F$-$T_1$*.

## 4. Subespacios de espacios $F$-$T_1$

De la nota 2.1 se deduce que *no todo subespacio de un espacio $F$-$T_1$ es $F$-$T_1$*. Sin embargo, *un subespacio abierto sí lo es*, como veremos enseguida.

**Teorema 4.1.** *Un subespacio abierto de un espacio $F$-$T_1$ también es $F$-$T_1$.*

**Demostración.** Sea $(X,\tau)$ un espacio $F$-$T_1$, y sean $Y \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ y $\tau_Y$ la topología de subespacio para $Y$. Supongamos que $a$ y $b$ son elementos distintos del conjunto $Y$. Existen $U, V \in \tau$ con $U \cap \{a,b\} = \{a\}$, $V \cap \{a,b\} = \{b\}$, $U \cup \{b\} \notin \tau$ y $V \cup \{a\} \notin \tau$.

Es claro que $\{a,b\} \cap (U \cap Y) = \{a\}$, $\{a,b\} \cap (V \cap Y) = \{b\}$, $U \cap Y \in \tau_Y$, $V \cap Y \in \tau_Y$.

Si fuera $(U \cap Y) \cup \{b\} \in \tau_Y$ entonces, como $Y \in \tau$, tendríamos que $(U \cap Y) \cup \{b\} \in \tau$, y así, $U \cup [(U \cap Y) \cup \{b\}] \in \tau$, o sea, $U \cup \{b\} \in \tau$, lo que no es cierto. Tampoco puede suceder que $(V \cap Y) \cup \{a\} \in \tau_Y$. Luego $(Y\tau_Y)$ es un espacio $F$-$T_1$. ∎

## 5. Espacios $F$-$T_1$ *versus* espacios $T_2$

Es claro que cualquier espacio topológico discreto con más de un punto es un espacio de Hausdorff que no es $F$-$T_1$. El siguiente teorema, que caracteriza los espacios de Hausdorff con más de un punto que son $F$-$T_1$, nos permite encontrar otros espacios con estas características.

**Teorema 5.1.** *Si $(X,\tau)$ es un espacio topológico de Hausdorff con más de un punto, entonces $(X,\tau)$ es $F$-$T_1$ si y solo si su único abierto finito es $\emptyset$.*

**Demostración.** Supongamos que en el espacio $(X,\tau)$ el único abierto finito es $\emptyset$. Sean $a$ y $b$ elementos diferentes en el conjunto $X$. Como $(X,\tau)$ es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $\tau$ con U $\cap \{a,b\} = \{a\}$ y $V \cap \{a,b\} = \{b\}$.

Si $W \in \tau$ y $a \in W$, entonces $W \cap U$ es infinito y disjunto de $V$. Luego $a \in D_\tau(V^c)$.

Si $T \in \tau$ y $b \in T$, entonces $T \cap V$ es infinito y disjunto de $U$. Luego $b \in D_\tau(U^c)$. En consecuencia, $(X, \tau)$ es $F$-$T_1$.

La otra implicación es evidente, teniendo en cuenta la nota 2.1. ∎

En contraste con el teorema 3.1, es posible que un producto de espacios topológicos sea $F$-$T_1$ sin que ninguno de los espacios factores lo sea, como se muestra en el siguiente ejemplo, que es consecuencia del teorema anterior. Este ejemplo también nos muestra que la imagen continua de un espacio $F$-$T_1$ no necesariamente es $F$-$T_1$.

**Ejemplo 5.1.** *Para cada* $i \in \mathbb{N}$ *sea* $X_i = \{0, 1\}$*, dotado de la topología discreta* $\beta_i = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$*.*

*Puesto que el espacio producto* $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \beta_i)$ *(el espacio de Cantor) es de Hausdorff y su único abierto finito es* $\emptyset$*, entonces, de acuerdo con el teorema 5.1, el espacio* $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \beta_i)$ *es un espacio* $F$-$T_1$*. Sin embargo el espacio* $(X_i, \beta_i)$ *no es* $F$-$T_1$*.*

*Por otra parte, como la i–ésima proyección*

$$\begin{array}{rccc} \pi_i & : & \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \beta_i) & \longrightarrow & (X_i, \beta_i) \\ & & (x_i)_{i \in I} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

*es una función continua, sobreyectiva y abierta, tenemos que* ***la imagen continua y abierta de un espacio*** $F$-$T_1$ ***no necesariamente es*** $F$-$T_1$*.*

El teorema que viene a continuación nos proporciona un *mecanismo para construir topologías que son* $F$-$T_1$ *pero que no son de Hausdorff.*

**Notación 5.1.** $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

**Teorema 5.2.** *Sea* $(X, \tau)$ *un espacio topológico de Hausdorff cuyo único abierto finito es* $\emptyset$*. Supongamos que existen dos colecciones de elementos de* $\tau$*,* $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ *y* $\{B_n : n \in \mathbb{N}^*\}$*, que satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $adh_\tau(A_{n+1}) \subset A_n$ *y* $adh_\tau(B_{n+1}) \subset B_n$ *(inclusiones estrictas).*
2. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.
3. *Para cualesquiera* $n, m \in \mathbb{N}^*$*,* $A_n \cap B_m \neq \emptyset$*, y* $A_n$ *y* $B_m$ *no son comparables por inclusión.*

*Sean $a$ y $b$ elementos que no están en el conjunto $X$ (podrían ser $a = X$ y $b = \{X\}$). Sobre el conjunto $Y = X \cup \{a, b\}$ consideremos la topología $\beta$ generada por el conjunto*

$$\Im = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \tau,$$

*donde*

$$\mathcal{A} = \{A_n \cup \{a\} : n \in \mathbb{N}^*\}$$

*y*

$$\mathcal{B} = \{B_n \cup \{b\} : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

*Entonces el espacio topológico $(Y, \beta)$ es $F$-$T_1$ pero no es $T_2$.*

**Demostración.** Es claro que $\Im$ es una base para $\beta$ y que, como el único elemento finito de $\Im$ es $\emptyset$, el único elemento finito de $\beta$ es $\emptyset$. También es claro que los únicos abiertos básicos que contienen $a$ son los del conjunto $\mathcal{A}$, y que los únicos abiertos básicos que contienen a $b$ son los del conjunto $\mathcal{B}$.

Puesto que todo elemento de $\mathcal{B}$ tiene intersección no vacía con todo elemento de $\mathcal{A}$, entonces el espacio $(Y, \beta)$ no es $T_2$.

Veamos ahora que el espacio $(Y, \beta)$ es $F$-$T_1$.

$(i)$ Sean $z$ y $w$ elementos distintos en $Y$, pero con $\{z, w\} \neq \{a, b\}$.

Usando el hecho de que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} adh_\tau(A_n) = \emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} adh_\tau(B_n)$ (que es consecuencia de las condiciones 1. y 2., se prueba muy fácilmente que existen abiertos disjuntos $U, V$ en $\beta$ con $z \in U$ y $w \in V$.

Sean $W, Z \in \beta$, arbitrarios, con $z \in W$ y $w \in Z$. $W \cap U$ es infinito y disjunto de $V$. Luego $z \in D_\beta(V^c)$. $Z \cap V$ es infinito y disjunto de U. Luego $w \in D_\beta(U^c)$.

$(ii)$ Sean $N = A_1 \cup \{a\}$ y $M = B_1 \cup \{b\}$.

Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $B_1$ y $A_n$ no son comparables, entonces todo elemento de $\mathcal{A}$ interseca $M^c \backslash \{a\}$. Luego $a \in D_\beta(M^c)$. Similarmente se tiene que $b \in D_\beta(N^c)$.

Por $(i)$ y $(ii)$, y por la nota 2.1, se concluye que $(Y, \beta)$ es un espacio $F$-$T_1$. ∎

Como una aplicación de este mecanismo, tenemos el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 5.2.** *Sea $X$ el "cuadrado sin borde"* $(0,1)\times(0,1)$ *y sea* $\mathcal{U}$ *la topología usual de* $(0,1)\times(0,1)$.

*Consideremos sobre el conjunto* $Y = X \cup \{(0,0),(1,0)\}$ *(que se obtiene al anexarle al cuadrado $X$ los dos vértices inferiores) la topología $\beta$ generada por el conjunto*

$$\Im = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{U},$$

*donde*

$$\mathcal{A} = \{A_n \cup \{(0,0)\} : n \in \mathbb{N}^*\} \ \ y \ \mathcal{B} = \{B_n \cup \{(1,0)\} : n \in \mathbb{N}^*\},$$

*siendo*

$$A_n = \left\{(x,y) \in X : y < \frac{1}{n}x\right\}$$

*y*

$$B_n = \left\{(x,y) \in X : y < \frac{1}{n}(1-x)\right\}.$$

*Como el espacio* $(X,\mathcal{U})$ *y las colecciones* $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ *y* $\{B_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ *satisfacen las condiciones del teorema 5.2, se tiene que el espacio* $(Y,\beta)$ *es* $F$-$T_1$ *pero no es de Hausdorff.*

A decir verdad, lo que obtuvimos primero fue el ejemplo 5.2 y luego el teorema 5.2, pues en principio sólo estábamos interesados en mostrar que había espacios $F$-$T_1$ que no eran de Hausdorff.

La idea de que generalizaramos el ejemplo fue del profesor **Carlos Javier Ruiz S.**, durante el más reciente Encuentro de Topología, realizado en la sede de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá.

## 6. Topologías que rinden cuenta de una topología $F$-$T_1$

En el siguiente teorema, que es el último del artículo, se muestra como "recuperar" una topología $F$-$T_1$ por medio de las topologías $T_1$ que son menos finas que ella, pero que no son $F$-$T_1$.

**Teorema 6.1.** *Sea* $(X,\beta)$ *un espacio topológico* $F$-$T_1$ *con más de un punto. Si* $\Psi$ *es la colección de topologías* $\mu$ *sobre* $X$*, que son* $T_1$ *pero que no son* $F$-$T_1$*, y que satisfacen* $\mu \subseteq \beta$*, entonces* $\beta = \bigcup \Psi$.

**Demostración.** Basta comprobar que $\beta \subseteq \bigcup \Psi$.

Sea $Z \in \beta \setminus \{\emptyset, X\}$, arbitrario. Sean $a \in Z$ y $b \notin Z$. Existen abiertos $A$ y $B$ en $\beta$ tales que $\{a, b\} \cap A = \{a\}$, $\{a, b\} \cap B = \{b\}$, $A \cup \{b\} \notin \beta$ y $B \cup \{a\} \notin \beta$.

Si $V \in \beta$ entonces con el símbolo $P(a, b, V)$ representaremos la proposición "si $b \in V$ entonces $a \in V$".

Consideremos las siguientes topologías sobre $X$:

$$\eta = \{V \in \beta : \text{la proposición } P(a, b, V) \text{ es verdadera}\}$$

y

$$\vartheta = \{V \setminus \{a\} : V \in \eta\} \cup \eta.$$

Es claro que $\vartheta \subseteq \beta$ y que $B \in \beta$, pero $B \notin \vartheta$. También es claro que $Z \in \vartheta$. Además, como todo abierto $U \in \vartheta$ que contenga $b$ satisface que $a \in U$, o, $U \cup \{a\} \in \vartheta$, entonces el espacio $(X, \vartheta)$ no es $F$-$T_1$, aunque claramente es $T_1$.

Por lo tanto $\vartheta \in \Psi$, con lo que $Z \in \bigcup \Psi$. ∎

## 7. Preguntas abiertas

A manera de cierre vamos a formular algunas de las preguntas que aún no tenemos resueltas con respecto a estos nuevos espacios. Si el lector está interesado en hacer algún tipo de aporte a este trabajo, puede hacernos llegar sus comentarios al departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, o al *e–mail* `nrpachon@hotmail.com`. Las "críticas sanas" también las consideraremos como aportes.

Supongamos que $X$ es un conjunto infinito.

1. Es conocido, y fácil de probar, que si $\Sigma$ es la colección de todas las topologías $T_1$ sobre $X$, entonces $card\,(\Sigma) = 2^{2^X}$ (ver [1]). La pregunta natural es: ¿cuántas topologías $F$-$T_1$ hay sobre $X$?

2. ¿Qué estructura tiene la colección de las topologías $F$-$T_1$ sobre $X$, dotada del orden de la inclusión?

3. Sabiendo que no hay una topología $F$-$T_1$ máxima sobre $X$, ¿hay topologías $F$-$T_1$ ***maximales*** sobre $X$?

4. Teniendo en cuenta que no hay una topología $F$-$T_1$ mínima sobre $X$, ¿hay topologías $F$-$T_1$ ***minimales*** sobre $X$?

# Referencias

[1] OTTO FRÖHLICH. "Das Halberdnungssystem der topologischen Räume auf einer Menge", *Math. Ann.* 156 (1964), 79–95.

[2] AZRIEL LEVY. *Basic Set Theory.* Springer Verlag, 1979.

[3] NÉSTOR RAÚL PACHÓN R. *Un mecanismo de adjunción para comparar topologías.* Tesis de Doctorado en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[4] JEAN E. RUBIN. *Set Theory for the Mathematician.* Holden Day, Inc., 1967.

[5] GEORGE F. SIMMONS. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* McGraw–Hill Book Co., 1963.

[6] STHEPEN WILLARD. *General Topology.* Addison–Wesley, 1968.